

Блок 3.1. Тожественны преобразования алгебраических выражений:

Упростите выражение:

$$\frac{|x^3 - 1| + |x + 1|}{x^3 + x}$$

*Ответ:*  $-1$  если  $x \in (-\infty, -1)$ ,  $\frac{2+x-x^3}{x^3+x}$  если  $x \in [-1, 0) \cup (0, 1)$ ,  $x=1$  если  $x \in [1, \infty)$ .

2. Тожественные преобразования тригонометрических выражений:

Пусть  $A, B, C$  – углы треугольника. Доказать, что:

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq 1$$

3. Прогрессии:

Найти сумму 19 первых членов ар. прогрессии  $a_1, a_2, \dots$ , если известно, что  $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$

*Ответ:* 1064.

4. Алгебраические уравнения:

Показать, что уравнение  $\sqrt{x^4 + x - 2} + \sqrt[4]{x^4 + x - 2} = 6$  имеет единственный положительный корень, и найти этот корень.

*Ответ:*  $x = 2$ .

5. Логарифмы. Показательные и логарифмические уравнения:

Решить уравнение:

$$|x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2$$

*Ответ:*  $x_1 = -1; x_2 = 2; x_3 = 4;$ .

6. Тригонометрические уравнения:

Решить уравнение:

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{64}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8}(2k+1).$$

### 7. Неравенства:

Найти целые неотрицательные значения  $x$ , удовлетворяющие неравенству:

$$\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} < 3$$

$$\text{Ответ: } [0; 8).$$

### 8. Дополнительные соотношения между элементами фигур:

В круг радиуса  $R$  вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

$$\text{Ответ: } 0.25R^2(8\sqrt{3}-9).$$

### 9. Задачи по стереометрии:

В ортоцентрическом тетраэдре  $DABC$  угол  $ABC$  – прямой:  $S_1, S_2, S_3$  - площади граней  $BAC, BAD, BCD$  соответственно. Доказать, что объем тетраэдра равен  $\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3}$

### 10. Задачи по геометрии с применением тригонометрии:

Найти радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, высота которой равна  $H$ , а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен  $\alpha$ .

$$\text{Ответ: } \frac{H \operatorname{ctg}^2 \alpha (\sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1} - 1)}{4}.$$

### 11. Применение уравнений к решению задач:

Два велосипедиста выехали одновременно из  $A$  и  $B$  навстречу друг другу. Первый прибыл в  $B$  через 4 ч. после встречи, второй прибыл в  $A$  через 9 ч. после встречи. Сколько часов был в пути каждый велосипедист?

$$\text{Ответ: } 10 \text{ и } 15 \text{ часов.}$$